0 7 2 4 8 6 5-1

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

УДК 519.642.3+517.988.8 На правах рукописи

Антонова Татьяна Владимировна

ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ НА КЛАССАХ ФУНКЦИЙ С ОСОБЕННОСТЯМИ

01.01.01 — **математический анализ**

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Екатеринбург
2001

Работа выполнена в отделе некорректных задач анализа и приложений Института математики и механики УрО РАН

Научный руководитель:
— доктор физико-математических наук А. Л. Агеев
Официальные оппоненты:
— доктор физико-математических наук, профессор В. В. Арестов
— доктор физико-математических наук, профессор В. А. Морозов
Ведущая организация: Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН.

Защита диссертации состоится 20 декабря 2001 г. в 11 ч. на заседании диссертационного совета Д 004.006.02 при Институте математики и механики УрО РАН по адресу: 620219, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИММ УрО РАН

Автореферат разослан 15 ноября 2001 года

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 004.006.02
доктор физ.-мат. наук В. М. Бадков.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В диссертации рассматриваются (не)линейные проблемы, характеризующиеся тем, что их решение неустойчиво к малым возмущениям исходных данных, т.е. некорректно поставленные задачи. Такого рода задачи возникают во многих областях науки и техники. При этом часто искомая функция имеет разрывы или другие особенности. Поэтому, и с теоретической, и с практической точки зрения, представляет интерес построение и изучение новых регуляризующих алгоритмов для разрывных функций. В работе введены неклассические множества функций с разрывами первого рода или δ−функциями, на которых рассмотрены задачи сглаживания зашумленных данных, устойчивого решения уравнений типа свертки и уравнений с конечномерной нелинейностью.

После основополагающих работ А.Н.Тихонова, В.К.Иванова, М.М.Лаврентьева теория неустойчивых (некорректных) задач привлекала внимание многих исследователей: А.Л.Агеева, В.Я.Арсенина, А.Б.Бакушинского, Г.М.Вайникко, Ф.П.Васильева, В.В.Васина, А.В.Гончарского, А.И.Гребенникова, Р.Латтеса, А.В.Леонова, Ж.-Л.Лионса, В.А.Морозова, В.В.Степанова, В.Н.Страхова, В.П.Тананы, Г.В.Хромовой, А.Г.Яголы и многих др.

Задачи восстановления функций по зашумленным данным ранее, в частности, изучались в работах А.И.Гребенникова (1987), В.Н.Страхова (1969), Г.В.Хромовой (1970) и др. Алгоритмы решения линейных уравнений типа свертки изложены, например, в монографиях А.Н.Тихонова, В.Я.Арсенина (1974), А.В.Гончарского, В.В.Степанова, А.Г.Яголы (1990), А.Н.Тихонова,А.С.Леонова, А.Г.Яголы (1995), В.А.Морозова (1992) и др. В последние годы интенсивно развиваются итерационные регуляризующие процессы решения нелинейных уравнений 1 рода (ссылки на соответствующую литературу см. в работах А.Б.Бакушинского, А.В.Гончарского (1994), В.В.Васина, А.Л.Агеева (1993), H.W.Engl, O.Scherzer (2000)). Отметим работу А.Л.Агеева (1997), где был введен класс уравнений с конечномерной нелинейностью.

Каждый метод регуляризации, как правило, связан с той или иной априорной информацией об искомой функции в виде ее принадлежности некоторому классу (множеству корректности). При этом приходится предъявлять к этому множеству противоречивые требования, поскольку, с одной стороны, искомое решение должно принадлежать этому множеству и, следовательно, оно должно быть достаточно широким. чтобы содержать, например, в нашем случае, негладкие функции. С другой стороны, чем у́же рассматриваемый класс, тем выше стабилизирующие свойства регулярного алгоритма (РА), позволяющие получать сходимость в более сильной топологии (норме).

Методы решения некорректных задач для разрывных функций изучались многими авторами. Регуляризаторы, использующие пространства функций ограниченной вариации рассматривались А.Л. Агеевым В.В. Васиным, И.Ф. Дорофеевым, В.П. Загоновым, А.С. Леоновым, В.В. Степановым, А.Г. Яголой и др. Для функций непрерывных, за исключением конечного числа разрывов первого рода, в этих работах была получена сходимость в равномерной метрике вне малой окрестности разрывов. В статье А.Л. Агеева (1991) был построен регуляризатор в пространстве Соболева W_2^{β} и получена сходимость в норме пространства W_2^{β}. Заметим, что пространство W_2^{β} при $0 < \beta < 1/2$ содержит разрывные функции.

Ряд авторов (А.И.Гребенников, А.В.Гончарский, В.В.Степанов, А.Г.Ягола) использовал априорную информацию о положительности, монотонности или выпуклости искомых функций. Для задачи сглаживания зашумленных данных А.И.Гребенниковым на основе сплайнов строились регуляризующие алгоритмы, позволяющие аппроксимировать функции с известными положениями максимумов, перегибов или изломов.

В теории приближения функций известны результаты по аппроксимации решений с известным положением особенностей. Отметим работу Д.В.Сушко(1997), в которой в другой постановке строились алгоритмы, позволяющие локализовать разрывы с неизвестным положением искомого решения для уравнения 1 рода типа свертки при точных данных.

Цель работы. Для задачи сглаживания зашумленных данных и решения уравнений типа свертки построить РА для аппроксимации решения при наличии априорной информации неклассического типа, связанной с принадлежностью искомого решения классу функций с конечным числом особенностей (разрывов первого рода, δ-функций).

Получить оценки погрешности РА не только для решения вне малой окрестности особенностей, но и для характеристик особенностей (положений и величин разрывов, характеристик δ-функций). Разработать методы решения уравнений с конечномерной нелинейностью на классах функций с особенностями.

Методы исследования. В диссертации использовались методы теории некорректно поставленных задач, функционального и гармонического анализа, линейной алгебры.

Научная новизна, теоретическая и практическая значимость. Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

— разработана специальная техника, основанная на использовании аналогов явления Гиббса; на этой основе для классов функций с конечным числом особенностей разработаны алгоритмы определения характеристик этих особенностей; получены оценки точности аппроксимации характеристик при наличии возмущений;

— с использованием алгоритмов предыдущего пункта построены РА решения уравнения типа свертки и задачи сглаживания зашумленных данных; получены оценки точности приближения искомых функций в равномерной метрике вне малой окрестности особенностей и оценки точности восстановления характеристик особенностей;

— на классах функций с особенностями получены условия на оператор задачи, обеспечивающие локальную единственность решения уравнений с конечномерной нелинейностью; построены итерационные РА для этих уравнений;

— на основе построенных РА и усовершенствованных методов, изложенных в монографии V.V.Vasin, A.L.Ageev (1995), для прикладных (линейных и нелинейных) интегральных уравнений 1 рода реализованы экономичные и высокоточные РА; на модельных расчетах показана их эффективность.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на Всероссийской научной конференции "Алгоритмический и численный анализ некорректных задач", посвященной памяти В.К.Иванова (Екатеринбург, 1995г.), на Всероссийской научной конференции "Алгоритмический анализ неустойчивых задач" (Екатеринбург, 2001г.), на Международной школе С.Б.Стечкина по теории функций (Миасс, 1997г.), на Международной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения С.Б.Стечкина (Екатеринбург, 2000г.), на школе С.Б.Стечкина по теории функций (Миасс. 2000 и 2001гг.), на 25-й, 27-й, 28-й, 31-й и 32-й Молодежных конференциях "Проблемы теоретической и прикладной математики" (Екатеринбург, 1994, 1996, 1997, 2000 и 2001гг.), на семинаре кафедры математического анализа и теории функций Уральского госуниверситета (2001г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1] - [10]. В работе [10] обоснование сходимости итерационного алгоритма. его программная реализация и проведение модельных расчетов выполнены автором. В работах [1]-[3] автору принадлежит реализация алгоритмов и проведение методических расчетов[1].

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, двух приложений и списка литературы. Объем работы — 155 страниц. Список литературы содержит 59 наименований.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю Александру Леонидовичу Агееву за постановку задач и постоянное внимание к работе.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приведен обзор работ, связанных с темой диссертации, и сформулированы основные результаты.

В главе 1 получены основные технические результаты, на основе которых в главах 2 и 3 конструируются алгоритмы решения некорректных задач и обосновываются оценки точности регуляризованных решений.

Введем два класса функций с особенностями, которые используются на протяжении глав 1-3. Заметим, что разработанная техника переносится и на другие классы функций, например, на функции, имеющие конечное число изломов. Далее $L_2 = L_2(-\infty, +\infty)$; через $\hat{f}$ будем обозначать преобразование Фурье функции f.

1. Функция x имеет конечное число l разрывов первого рода в точках $\{s_k\}_1^l$. Величины скачков $\Delta_k \neq 0 (k = 1, 2, ..., l)$. Вне точек разрыва функция непрерывно дифференцируема и в каждой точке разры-

[1] В работе [1] — в части, связанной с РССА, расчеты для задачи ЯГР выполнены Е.В.Ворониной; в работе [3] — алгоритмы с аппроксимацией на основе полиномов Лежандра принадлежат автору, а алгоритмы с аппроксимацией на основе полиномов Чебышева — Е.В.Поповой.

ва существуют левые и правые конечные пределы производной. Сама функция x и ее производная за исключением точек разрыва x' интегрируемы с квадратом.

2. Функция x имеет вид (l — натуральное число)

$$x(s) = \bar{x}(s) + \sum_{k=1}^{l} \Delta_k \cdot \delta(s - s_k).$$

где $\delta(s)$ — δ-функция, $\Delta_k \neq 0 (k = 1, 2, ..., l)$. Функция $\bar{x}$ непрерывно дифференцируема. Сама функция $\bar{x}$ и производная $\bar{x}'$ принадлежат L_2.

В теории тригонометрических рядов хорошо известно явление Гиббса, возникающее в окрестности точки разрыва первого рода. В качестве метода регуляризации во 2 и 3 главах используется метод срезки, с параметром регуляризации B ($B > 0$, $B \to \infty$). При этом на классах функций 1 и 2 вокруг каждой особенности возникают явления аналогичные явлению Гиббса. Предлагается использовать эти эффекты для определения характеристик особенностей s_k, $\Delta_k (k = 1, 2, ..., l)$.

Рассмотрим функцию $\phi^B(s)$, описывающую аналог явления Гиббса от единичного разрыва в точке ноль

$$\phi^B(s) = \frac{\operatorname{sign} s}{\pi} \int_{B|s|}^{2B|s|} \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi.$$

В главах 2 и 3 получены следующие уравнения для определения характеристик особенностей

$$\sum_{k=1}^{l} \Delta_k \phi^B(s - s_k) = \psi_0^B(s) + \Delta\psi^B(s), \tag{1}$$

где $\psi_0^B + \Delta\psi^B$ — функция, вычисляемая по исходным данным задачи. Точные значения $s_k, \Delta_k (k = 1, 2, ..., l)$ удовлетворяют уравнению (1) при точной правой части ψ_0^B. В $\Delta\psi^B$ входит погрешность, возникающая при выводе уравнения (1), и погрешности задания исходных данных задачи. Для каждой из задач получается своя оценка $\Delta\psi^B$.

В §1 главы 1 изучаются свойства функции ϕ^B. В лемме 1.1 установлен факт локализации функции $\phi^B(s)$ в окрестности точки ноль: для достаточно большого B, для всех s таких, что $|s| \geq h > 0$ получена оценка по параметру B функции $\phi^B(s)$ в равномерной метрике.

Выбирая $h = (1/2)\min\{|s_k - s_j| : k \neq j\}$, получаем, что уравнение (1) распадается на l независимых уравнений относительно s_k, $\Delta_k (k = 1, 2, ..., l)$

$$\Delta_k \phi^B(s - s_k) = \psi_\delta^B(s), \quad s \in [s_k - h, s_k + h], \tag{2}$$

где $\psi_\delta^B(s) = \psi_0^B(s) + \Delta\psi_k^B(s)$. Для задач, рассматриваемых в главе 2, показано, что погрешность $\Delta\psi_k^B(s)$ удовлетворяет условию

$$(I) \qquad \Delta\psi_k^B(s) = \alpha_{(k)}^B(s), \qquad \sup_{|s - s_k| \le h} \left|\alpha_{(k)}^B(s)\right| \le A_1/B^p,$$

где A_1, p — положительные константы.

Для задач, рассматриваемых в главе 3, погрешность $\Delta\psi_k^B(s)$ удовлетворяет условию

$$(II) \qquad \Delta\psi_k^B(s) = \alpha_1^B(s) + \alpha_{2(k)}^B(s),$$

$$\sup_{|s| \le 2d} \left|\partial^m \alpha_1^B(s)/\partial s^m\right| \le K_m B^m \, (m = 0, 1, 2, 3), \quad \sup_{|s - s_k| \le h} \left|\alpha_{2(k)}^B(s)\right| \le A_2/B^p,$$

где $d \ge \max\{|s_k| : k = 1, 2, ..., l\}$, A_2, p, $K_m (m = 0, 1, 2, 3)$ — положительные константы.

Ясно, что все рассуждения можно проводить только для $k = 1$. Обозначим через $s_{\phi,1}^{\max}$ точку глобального максимума функции $\phi^B(s - s_1)$: $s_{\phi,1}^{\max} = s_1 - \pi/(3B)$. Конструктивно мы умеем вычислять точку $s_\psi^{\max}$ максимума функции ψ_δ^B.

Обозначим $a = \phi^B(\pi/(3B))$. Введем множество $\Omega = [s_1 - h, s_1 + h] \setminus [s_{\phi,1}^{\max} - D_3/B, s_{\phi,1}^{\max} + D_3/B]$ и обозначим $\bar{a} = \max_\Omega \phi^B(s - s_1)$. Пусть $\bar{K}_0 = \Delta_1(a - \bar{a})/2$.

Лемма 1.4. *Пусть выполняются условия (II), $0 < K_0 \le \bar{K}_0$ и точка $s_\psi^{\max} \in [s_1 - h, s_1 + h]$. Тогда существуют положительные константы D_3, $\hat{B}_2$ такие, что для всех $B > \hat{B}_2$ имеем*

$$s_\psi^{\max} \in [s_{\phi,1}^{\max} - D_3/B, s_{\phi,1}^{\max} + D_3/B].$$

В §2 главы 1 решается уравнение (2) при $k = 1$. Выписаны формулы для определения приближений к s_1, Δ_1 и получены оценки точности (по параметру регуляризации B) их аппроксимации при различных возмущениях $\Delta\psi_k^B (k = 1, 2, ..., l)$ (леммы 1.5–1.8).

Лемма 1.5. *Пусть для $\Delta\psi_1^B$ выполняется условие (I) и точка $s_\psi^{\max} \in [s_1 - h, s_1 + h]$. Тогда для всех $B > \hat{B}_2$ ($\hat{B}_2$ —константа из* *леммы 1.4) имеет место оценка* $|\tilde{s}_1 - s_1| \le C_1/B^{1+p/2}$ *(C_1 — константа), где* $\tilde{s}_1 = s_\psi^{\max} - \pi/(3B)$ *для* $\Delta_1 > 0$ *или* $\tilde{s}_1 = s_\psi^{\max} + \pi/(3B)$ *для* $\Delta_1 < 0$.

Введем величину $\tilde{\Delta}_1 = \psi_\delta^B(s_\psi^{\max})/a$, где $a = \phi^B(\pi/(3B))$.

Лемма 1.7. *Пусть для* $\Delta\psi_1^B$ *выполняется условие (I), точка* $s_\psi^{\max} \in [s_1 - h, s_1 + h]$ *и* $\Delta_1 > 0$. *Тогда существует положительная константа* $\hat{B}_1$ *такая, что для всех* $B > \hat{B}_1$ *имеем оценку*

$$\left|\tilde{\Delta}_1 - \Delta_1\right| \le C_2/B^p, \quad C_2 \text{ — \textit{константа}.}$$

В §3 главы 1 приведены три технических утверждения, необходимых для обоснования сходимости итерационного процесса решения нелинейного уравнения 1 рода в главе 3. При решении этой задачи кроме уравнения (1), используемого для аппроксимации характеристик особенностей, аналог явления Гиббса также используется для построения итерационного процесса. Для этого необходимо исследовать поведение следующих функций ($n = 1, 2, ...$)

$$\frac{\partial^n}{\partial s^n}\left(\frac{\sin Bs}{s}\right), \quad \frac{\partial^n}{\partial s^n}\left(\frac{\cos Bs - 1}{s}\right), \quad \int_{-B}^{B} \hat{x}(z)|z|^n \exp(izs)dz,$$

где функция x удовлетворяет условию 1 или 2 при $l = 1$.

В §1 главы 2 рассматривается задача восстановления неизвестной функции x^*, удовлетворяющей условию 1, по заданной функции x_δ; предполагается, что $x_\delta \in L_2$, $\|x^* - x_\delta\|_{L_2} \le \delta$, уровень погрешности δ известен. Кроме того, известны числа $d \ge \max\{|s_k| : k = 1, 2, ..., l\}$, $0 < \Delta^{\min} \le \max\{|\Delta_k| : k = 1, 2, ..., l\}$.

Возмущенная правая часть уравнения (2) для определения характеристик особенностей определяется следующим образом $\psi_\delta^B(s) = x_\delta^{2B}(s) - x_\delta^B(s)$, где

$$x_\delta^B(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-B}^{B} \hat{x}_\delta^*(z) \exp(izs)\, dz, \quad B > 0,$$

есть регуляризованное решение задачи сглаживания зашумленных данных методом регуляризации срезкой. Для функции x_δ^B при $\delta = 0$ (индекс $\delta = 0$ будем опускать) для $s \ne s_k$ ($k = 1, 2, ..., l$) имеет место представление (см. следствие 1 в приложении A.1)

$$x^B(s) = x^*(s) + \sum_{k=1}^{l} \Delta_k \cdot \Phi(B, s - s_k) + \alpha_0^B(s), \tag{3}$$

$$\Phi(B,s) = -\frac{\operatorname{sign} s}{\pi}\int_{B|s|}^{\infty}\frac{\sin\xi}{\xi}d\xi, \qquad \sup_{s\in(-\infty,\infty)}\left|\alpha_0^B(s)\right| \le A_0/B^p,$$

где $p = 0.5$, A_0 — константа. Здесь $h = (1/2)\min\{|s_k - s_j| : k \ne j\}$.

Лемма 2.1. *Пусть для функции x^* выполняется условие 1. Тогда существуют положительные константы $\hat{B}_0$, A_1, A_1' такие, что для любого достаточно малого $\delta > 0$ при связи параметров $B = M/\delta^{2/(1+2p)} > \hat{B}_0$ (M — константа), для всех $k = 1, 2, ..., l$ справедливо равенство*

$$\Delta_k\phi^B(s - s_k) = \psi_\delta^B(s) - \alpha_{(k)}^B(s), \qquad \sup_{|s - s_k|\le h}\left|\alpha_{(k)}^B(s)\right| \le A_1/B^p.$$

Кроме того, для всех s, не принадлежащих множеству $\cup_{k=1}^l[s_k - h, s_k + h]$, имеем оценку $\left|\psi_\delta^B(s)\right| \le A_1'/B^p$.

Выпишем отдельно процедуру вычисления приближения к положению разрыва с максимальной величиной скачка по заданной функции ψ_δ^B.

Процедура $\Pi s(\psi_\delta^B)$.

1. Найти $s_\psi^{\max}$ — точку максимума функции ψ_δ^B на отрезке $[-2d, 2d]$. (Если функция ψ_δ^B принимает максимальное значение в нескольких точках, то в качестве $s_\psi^{\max}$ можно выбрать любую из них.)
2. Найти точку $s_\psi^{\min}$, в которой функция ψ_δ^B принимает наименьшее значение на отрезке $[s_\psi^{\max} - \pi/B, s_\psi^{\max} + \pi/B]$.
3. Если $s_\psi^{\min} < s_\psi^{\max}$, то $\tilde{s} = s_\psi^{\max} - \pi/(3B)$. Иначе $\tilde{s} = s_\psi^{\max} + \pi/(3B)$.

Выпишем алгоритм аппроксимации точек разрывов и величин скачков.

Алгоритм П. Положим $\psi_1^B(s) = \psi_\delta^B(s)$, $k = 1$.
В цикле: используя процедуру $\Pi s(\psi_k^B)$, находим приближение к положению разрыва $s_k^\delta = \tilde{s}$. Вычисляем

$$\Delta_k^\delta = \operatorname{sign}\left(\psi_k^B(s_k^\delta + \pi/(3B))\right)\psi_k^B(s_\psi^{\max})/a.$$

Если выполняется условие $|\Delta_k^\delta| > \Delta^{\min}/2$, то считаем, что аппроксимация k-й точки разрыва получена, полагаем $k = k + 1$,

$$\psi_k^B(s) = \psi_{k-1}^B(s) - \Delta_{k-1}^\delta \cdot \phi^B(s - s_{k-1}^\delta),$$

и повторяем цикл. Иначе считаем, что на предыдущем шаге найдены все точки разрыва, полагаем $m = k - 1$. Процесс завершен.

Теорема 2.1. *Пусть функция x^* удовлетворяет условию 1. Тогда для любого $M > 0$ существует положительные константы $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$, $\hat{B}_4$ такие, что начиная с любого достаточно малого $\delta > 0$ при связи параметров $B = M/\delta^{2/(1+2p)} > \hat{B}_4$ и действуя согласно предложенному алгоритму П, будем иметь*

1) $l = m$;

2) найденные приближения s_k^δ, Δ_k^δ положений точек разрывов s_k и величин скачков Δ_k таковы, что

$$\left|s_k - s_k^\delta\right| \le \tilde{C}_1 \delta^{(2+p)/(1+2p)}, \qquad \left|\Delta_k - \Delta_k^\delta\right| \le \tilde{C}_2 \delta^{2p/(1+2p)}, \quad k = 1, 2, ..., l.$$

Для равномерного приближения искомой функции вне окрестности разрывов рассмотрим функцию

$$x_\Delta^\delta(s) = x_\delta^B(s) - \sum_{k=1}^{l} \Delta_k^\delta \cdot \Phi(B, s - s_k^\delta), \tag{4}$$

где Δ_k^δ, s_k^δ $(k = 1, ..., l)$ определены с помощью алгоритма П. Введем множество $W_\delta = R \setminus \left(\cup_{k=1}^m (s_k^\delta - \delta^{(2-p)/(1+2p)}, s_k^\delta + \delta^{(2-p)/(1+2p)})\right)$.

Теорема 2.2. *В условиях теоремы 2.1 имеет место оценка*

$$\sup_{s \in W_\delta} \left|x(s) - x_\Delta^\delta(s)\right| \le \tilde{C}_3 \delta^{2p/(1+2p)}, \quad \tilde{C}_3 \text{— константа.}$$

В §2 главы 2 рассматривается уравнение типа свертки

$$Ax \equiv \int_{-\infty}^{\infty} K(t-s)\, x(s)\, ds = y(t), \quad t \in (-\infty, +\infty), \tag{5}$$

где оператор A определен на функциях вида 1 и действует в L_2. Предполагается существование точного (искомого) решения x^*. Вместо точной правой части $y^* = A[\sigma^*]x^*$ известно y^δ : $\left\|y^* - y^\delta\right\| \le \delta$. Также предполагается, что точное решение уравнения (5) удовлетворяет условию 1. Ядро исходного уравнения (5) должно удовлетворять следующему условию.

3. Функция $K(t) \in L_2$ является четной (или нечетной); функция $\hat{K}(z) \ne 0$ для $z \in (-\infty, \infty)$.

В (2) функция $\psi_\delta^B(s) = x_\delta^{2B}(s) - x_\delta^B(s)$, где

$$\hat{x}_\delta^B(z) = \begin{cases} \hat{y}^\delta(z)/\hat{K}(z), & |z| \le B, \\ 0, & |z| > B. \end{cases} \tag{6}$$

В лемме 2.2 показано, что в этом случае возмущения $\Delta\psi_k^B (k = 1, 2, ..., l)$ удовлетворяют условиям (I). Для определения количества точек разрыва, приближенного определения их положений и величин скачков используется алгоритм П §1.

Введем функцию $\theta(B) = \max\limits_{|z|\leq B} \left|\hat{K}(z)\right|^{-1}$.

Теорема 2.3. *Пусть функции x^* и $K(t)$ удовлетворяют соответственно условиям 1 и 3. Тогда для любого $M > 0$ существуют положительные константы C_1, C_2, $\hat{B}_4$ такие, что начиная с любого достаточно малого $\delta > 0$, при связи параметров $B^{p+0.5}\theta(B) = M/\delta > \hat{B}_4$ и действуя согласно алгоритму П, будем иметь*
1) $m = l$;
2) найденные приближения s_k^δ, Δ_k^δ положений точек разрывов s_k и величин скачков Δ_k таковы, что

$$\left|s_k - s_k^\delta\right| \leq C_1/(B(\delta))^{1+p/2}, \quad \left|\Delta_k - \Delta_k^\delta\right| \leq C_2/(B(\delta))^p, \quad k = 1, 2, ..., l.$$

Теорема 2.4. *В условиях теоремы 2.3 имеет место оценка*

$$\sup_{s\in W_\delta} \left|x(s) - x_\Delta^\delta(s)\right| \leq C_3/(B(\delta))^p,$$

где $W_\delta = R \setminus \left(\cup_{k=1}^m (s_k^\delta - (B(\delta))^{1-p/2}, s_k^\delta + (B(\delta))^{1-p/2})\right)$.

В §3 главы 2 рассматривается линейное интегральное уравнение типа свертки (5) для функций, удовлетворяющих условию 2, при тех же условиях 3 на функцию $K(t)$, что и в §2 главы 2. Предполагается, что оператор A определен на функциях вида 2. Возмущенная правая часть уравнения (2) определяется по формуле

$$\psi_\delta^B(s) = \int_0^s (x_\delta^{2B}(\tau) - x_\delta^B(\tau))d\tau,$$

где x_δ^B — регуляризованное решение исходного уравнения, полученное по формуле (6). Для функции x_δ^B при $\delta = 0$ (индекс $\delta = 0$ будем опускать) для $s \neq s_k$ $(k = 1, 2, ..., l)$ справедливо представление (следствие 2 в приложении А.1)

$$x^B(s) = x^*(s) + \sum_{k=1}^{l} \Delta_k \cdot \bar{\Phi}(B, s - s_k) + \alpha_0^B(s),$$

$$\bar{\Phi}(B, s) = \sin Bs/\pi s, \qquad \sup_{s\in(-\infty,\infty)} \left|\alpha_0^B(s)\right| \leq A_0/B^p,$$

$p = 0.5$, A_0 — константа. В лемме 2.3 показано, что возмущения удовлетворяют условиям (I). Для определения количества δ-функций и приближенного определения их характеристик используется алгоритм П. Теорема 2.5 полностью аналогична теореме 2.3 с заменой условия 1 на условие 2; окончательные оценки имеют вид

$$\left|s_k - s_k^\delta\right| \le C_1/(B(\delta))^{1+p/2}, \qquad \left|\Delta_k - \Delta_k^\delta\right| \le C_2/(B(\delta))^p,\ k = 1, 2, ..., l.$$

Для равномерного приближения искомой функции вне окрестности особенностей строится функция

$$x_\Delta^\delta(s) = x_\delta^B(s) - \sum_{k=1}^{l} \Delta_k^\delta \cdot \bar{\Phi}(B, s - s_k^\delta). \tag{7}$$

В теореме 2.6 получена оценка

$$\sup_{s \in W_\delta} \left|x(s) - x_\Delta^\delta(s)\right| \le C_3/(B(\delta))^{p/4},$$

где $W_\delta = R \setminus \left(\cup_{k=1}^m (s_k^\delta - (B(\delta))^{-p/4}, s_k^\delta + (B(\delta))^{-p/4})\right)$, C_3 — константа.

В главе 3 рассматривается задача решения интегрального уравнения 1 рода типа свертки, оператор которого зависит от числового параметра σ

$$A[\sigma]x \equiv \int_{-\infty}^{\infty} K(t - s, \sigma)\, x(s)\, ds = y(t), \quad t \in (-\infty, \infty), \tag{8}$$

где при $\sigma \in R^1$ линейный оператор $A[\sigma]$ определен на функциях вида 1 или 2 и действует в L_2. Предполагается существование точного (искомого) решения x^*. Вместо точного значения параметра σ^* известно $\bar{\sigma} : |\sigma^* - \bar{\sigma}| \le \rho$, а вместо точной правой части $y^* = A[\sigma^*]x^*$ известно $y^\delta : \|y^* - y^\delta\| \le \delta$. Также известны ρ и δ.

При малом δ целесообразно рассматривать (8) как уравнение 1 рода *с конечномерной нелинейностью*, где пара $\{\sigma^*, x^*\}$ является искомой. Этот подход применим при дополнительных условиях на функцию $K(t, \sigma)$ и искомое решение x^* и позволяет добиться существенно лучшей точности восстановления x^*.

Для интегральных уравнений Фредгольма 1 рода с конечномерной нелинейностью более общего вида, чем (8), были сформулированы условия на оператор $A[\sigma]$, обеспечивающие локальную единственность решения нелинейного уравнения (А.Л.Агеев (1997), А.Л.Агеев, Т.В.Антонова, Е.В.Воронина (1996)). В данной задаче эти условия не выполняются. Более того, на всем классе решений $x^* \in L_2$ единственность определения пары $\{\sigma^*, x^*\}$, вообще говоря, отсутствует. В [10] впервые было замечено, что наличие особенностей у искомого решения может играть положительную роль для восстановления единственности (при дополнительных условиях на ядро уравнения).

В §1 главы 3 предполагается, что точное решение уравнения (8) удовлетворяет усиленному условию 1.

1$'$. Функция x^* имеет конечное число $l > 0$ точек разрыва 1 рода и вне точек разрыва дважды непрерывно дифференцируема. Производные имеют в точках разрыва левые и правые конечные пределы. Сама функция и обе производные, за исключением точек разрыва, интегрируемы с квадратом. Это условие рассматривается в двух вариантах.
а) Точки разрыва $\{s_k\}_1^l$ известны, величины скачков $\{\Delta_k\}_1^l$ — нет.
б) Число разрывов l, точки разрыва и величины скачков неизвестны. Предполагается, что известны числа $0 < \Delta^{\min} \le \min\{|\Delta_k| : k = 1, 2..., l\}$, $d \ge \max\{|s_k| : k = 1, 2, ..., l\}$.

Используя преобразование Фурье, сформулируем условия 3$'$, 4, 5 на функцию K (различия для случаев а) и б) будут уточняться при формулировке теорем).

3$'$. Для всех $\sigma : |\sigma - \sigma^*| \le \rho$ функция $K(t,\sigma) \in L_2$ является четной (или нечетной); существуют две производные функции $\hat{K}(z,\sigma)$ по σ, принадлежащие L_2; функция $\hat{K}(z,\sigma) \ne 0$ для $z \in (-\infty, \infty)$.

Рассмотрим функцию $\hat{K}(z,\sigma^*)/\hat{K}(z,\sigma)$, где σ принадлежит окрестности точки σ^*. Обозначим $\Delta\sigma = \sigma^* - \sigma$ и запишем разложение Тейлора этой функции в точке σ^* при каждом фиксированном z

$$\hat{K}(z,\sigma^*) \Big/ \hat{K}(z,\sigma) = 1 + Q_1(z,\sigma^*)\Delta\sigma + Q_2(z,\tilde{\sigma})(\Delta\sigma)^2,$$

где $\tilde{\sigma} \in (\sigma^*, \sigma)$. Введем условия на функции Q_1 и Q_2.

4. Существуют положительные константы T_1', T_1'', p_γ, r_0 и натуральное число γ такие, что для любого $0 < r \le r_0$ функция $Q_1(z,\sigma)$ удовлетворяет условиям

$$Q_1(z,\sigma) = \tilde{Q}_1(z,\sigma)\left(p_\gamma |z|^\gamma + \tilde{Q}_2(z,\sigma)\right), \quad p_\gamma \ne 0,$$

$$\sup_{|z| \le B, |\sigma - \sigma^*| \le r/B^\gamma} \left|\tilde{Q}_1(z,\sigma)\right| \le T_1', \quad \tilde{Q}_1(z,\sigma^*) = 1, \quad B > 0,$$

$$\sup_{|\sigma-\sigma^*|\le r/B^\gamma} \left|\dot{Q}_2(z,\sigma)\right| \le T_1''(|z|^{\gamma-1}+1).$$

5. Существует положительная константа T_2 такая, что для любого $0 < r \le r_0$ имеем (r_0, γ — константы из условия 4)

$$\sup_{|\sigma-\sigma^*|\le r/B^\gamma} |Q_2(z,\sigma)| \le T_2(|z|^{2\gamma}+1), \quad B>0.$$

Отметим, что условиям 3′, 4, 5 удовлетворяют, например, функции $\exp(-t^2/\sigma^2)$ и $\sigma/(\sigma^2+t^2)$.

В качестве регуляризованного решения рассмотрим функцию

$$\hat{x}_\delta^B[\sigma](z) = \begin{cases} \hat{y}^\delta(z)/\hat{K}(z,\sigma), & |z|\le B, \\ 0, & |z|>B. \end{cases} \tag{9}$$

Рассмотрим итерационный процесс уточнения параметра σ для случая, когда решение удовлетворяет условию 1′a). Введем функцию $\theta(B,\sigma) = \max_{|z|\le B} \left|\hat{K}(z,\sigma)\right|^{-1}$. Зададим последовательность параметров регуляризации $B_i = \left(r/(q^{i-1}\rho)\right)^{1/\gamma}$. Зафиксируем любую точку разрыва s_k $(k=1,2,...,l)$.

Алгоритм П1(а). Положим $\sigma^1 = \bar{\sigma}$, $i=1$.
В цикле: если выполняется условие $B_i^{p+0.5}\delta\theta(B_i,\sigma^i) > M$, то полагаем $i(\delta) = i-1$, $\sigma^{i(\delta)} = \sigma^{i-1}$ и выходим из цикла (если $i=1$, то $\sigma^{i(\delta)} = \bar{\sigma}$). Иначе вычисляем

$$\sigma^{i+1} = \sigma^i - \frac{x_\delta^{B_i}[\sigma^i](s_k - \pi/B_i) - x_\delta^{B_i^\beta}[\sigma^i](s_k - \pi/B_i^\beta)}{\frac{\partial}{\partial\sigma} x_\delta^{B_i}[\sigma^i](s_k - \pi/B_i)}. \tag{10}$$

Полагаем $i = i+1$ и повторяем цикл.

Теорема 3.2. *Пусть для функций x^* и $K(t,\sigma)$ выполнены условия 1′a) и 3′, 4, 5. Тогда при всех $k = 1,2,...,l$, $0<q<1$, $0<\beta<1$, $M>0$, для любых достаточно малых положительных ρ, r, δ и любом $\bar{\sigma}$: $|\bar{\sigma}-\sigma^*| \le \rho$ итерационный процесс П1(а) всегда завершится, $i(\delta)\to\infty$ при $\delta\to 0$ и имеет место оценка $\left|\sigma^{i(\delta)}-\sigma^*\right| \le q^{i(\delta)}\rho$.*

Положим $B = B_{i(\delta)}$, $\sigma = \sigma^{i(\delta)}$, где $B_{i(\delta)}$, $\sigma^{i(\delta)}$ определяются алгоритмом П1(а). Введем функцию

$$\psi_\delta^B[\sigma](s) = x_\delta^{2B}[\sigma](s) - x_\delta^B[\sigma](s).$$

Выпишем формулу для определения приближения к величинам скачков ($a = \phi^B(\pi/(3B))$).

$$\Delta_k^\delta = \psi_\delta^{B^\beta}[\sigma](s_k + \pi/(3B^\beta))/a, \quad k = 1, 2, ..., l.$$

Положим

$$x_\Delta^\delta(s) = x_\delta^{B^\beta}[\sigma](s) - \sum_{k=1}^{l} \Delta_k^\delta \cdot \Phi(B^\beta, s - s_k).$$

Теорема 3.3. *В условиях теоремы 3.2 для $k = 1, 2, ..., l$ справедлива оценка*

$$\left|\Delta_k^\delta - \Delta_k\right| \le C_2/B^{p_2},$$

где C_2 — константа, $p_2 = \min\{\gamma(1-\beta); p\beta; p + 0.5 - 0.5\beta\}$. Если дополнительно $0 < \beta < \gamma/(\gamma + 0.5)$, то имеет место оценка

$$\sup_{s \ne s_k (k=1,2,...,l)} \left|x^*(s) - x_\Delta^\delta(s)\right| \le C_3/B^{p_3},$$

где C_3 — константа, $p_3 = \min\{\gamma(1-\beta) - 0.5\beta; p\beta; p + 0.5 - 0.5\beta\}$.

Каждый шаг решения уравнения (8) для варианта б) (неизвестны положения разрывов) включает два этапа. Сначала производится уточнение параметра σ, затем приближаются характеристики разрывов и строится функция, аппроксимирующая x^* вне окрестностей разрывов.

Алгоритм П1(б) уточнения параметра σ объединяет в себе процесс П1(а) уточнения параметра σ при известных положениях разрывов и алгоритм П (см. §1 гл.2) определения положений разрывов при фиксированном текущем σ^i. Для построения нового алгоритма необходимо выбирать разные параметры регуляризации B и $B1$ при определении положений разрывов и при уточнении σ. Согласование параметров регуляризации достигается введением нового параметра $\nu > 1$ и выбором $B1 = B/\nu$, где B — параметр для уточнения σ, $B1$ — параметр для определения положения разрыва. Возмущенная правая часть уравнения (2) определяется формулой $\psi_\delta^{B/\nu}[\sigma](s) = x_\delta^{2B/\nu}[\sigma](s) - x_\delta^{B/\nu}[\sigma](s)$.

В лемме 3.2 выписано уравнение (2) для определения Δ_k, s_k ($k = 1, 2, ..., l$) и показано, что возмущения $\Delta\psi_k$ ($k = 1, 2, ..., l$) удовлетворяют условию (II).

Зададим $B_i = \left(r/(q^{i-1}\rho)\right)^{1/\gamma}$. Напомним, что γ — константа из условия 4 на функцию $K(t, \sigma)$, p — показатель степени в оценке остатка в разложении (3). Значения параметров, удовлетворяющие условиям $0 < q < 1$, $0 < \beta < 1$, $M > 0$, будем называть допустимыми.

Алгоритм П1(б). Положим $\sigma^1 = \bar{\sigma}$, $i = 1$.
В цикле: при первом выполнении условия $B_i^{p+0.5}\delta\theta(B_i, \sigma^i) > M$, полагаем $i(\delta) = i - 1$, $s^{i(\delta)} = s^{i-1}$, $\sigma^{i(\delta)} = \sigma^{i-1}$ (при $i = 1$ положение разрыва не определяется, $\sigma^{i(\delta)} = \bar{\sigma}$) и выходим из цикла. Иначе, используя процедуру $\Pi s(\psi_\delta^{B_i/\nu}[\sigma^i])$, находим приближение к положению разрыва $s^i = \tilde{s}$. Приближение к параметру σ вычисляем по формуле

$$\sigma^{i+1} = \sigma^i - \frac{x_\delta^{B_i}[\sigma_i](s^i - \pi/B_i) - x_\delta^{B_i^\beta}[\sigma^i](s^i - \pi/B_i^\beta)}{\frac{\partial}{\partial\sigma} x_\delta^{B_i}[\sigma^i](s^i - \pi/B_i)}. \tag{11}$$

Полагаем $i = i + 1$ и повторяем цикл.

Теорема 3.4. *Пусть функции x^* и $K(t, \sigma)$ удовлетворяют условиям 1'б) и 3', 4, 5($\gamma > 1$) . Тогда при всех $0 < q < 1, 0 < \beta < 1, M > 0$, начиная с некоторых, достаточно малых, $\rho > 0$, $r > 0$, $\delta > 0$ и достаточно большого ν, для любого $\bar{\sigma}$: $|\bar{\sigma} - \sigma^*| \le \rho$ итерационный процесс П1(б) всегда завершится, $i(\delta) \to \infty$ и имеет место оценка $|\sigma^{i(\delta)} - \sigma^*| \le q^{i(\delta)}\rho$.*

После получения уточненнного значения параметра $\sigma^{i(\delta)}$ с помощью алгоритма П2, аналогичного алгоритму П §1 главы 2, находим аппроксимации точек разрывов и величин скачков.

Алгоритм П2. Положим $\psi_1^B(s) = \psi_\delta^B[\sigma^{i(\delta)}](s)$; $k = 1$.
В цикле: используя процедуру Пs для функции ψ_k^B, находим $s_k^\delta = \tilde{s}$.
Вычисляем $\Delta_k^\delta = \mathrm{sign}\,(\psi_k^B(s_k^\delta + \pi/(3B)))\psi_k^{B^\beta}(s_\psi^{\max})/a$.
Если $|\Delta_k^\delta| > \Delta^{\min}/2$, то полагаем $k = k + 1$,

$$\psi_k^B(s) = \psi_{k-1}^B(s) - \Delta_{k-1}^\delta \cdot \phi^B(s - s_{k-1}^\delta),$$

и возвращаемся к началу цикла. Иначе считаем, что на предыдущем шаге найдены все точки разрыва и $m = k - 1$. Процесс завершен.

Теорема 3.5. *Пусть функции x^* и K удовлетворяют условиям 1'б) и 3', 4, 5($\gamma > 1$), константы β, M, q допустимы. Тогда при всех достаточно малых положительных r, ρ и $\delta > 0$, для любого $\bar{\sigma}$: $|\bar{\sigma} - \sigma^*| \le \rho$ для алгоритма П1(б) будет справедливо заключение теоремы 3.4, а для процедуры П2 выполнено $m = l$ и справедливы оценки*

$$|s_k - s_k^\delta| \le K_1' r / B_{i(\delta)}, \qquad |\Delta_k - \Delta_k^\delta| \le C_2 / B_{i(\delta)}^{p_2}, \quad k = 1, 2, ..., l,$$

где $p_2 = \min\{p\beta; \gamma(1-\beta); p+0.5-0.5\beta\}$, K_1', C_2 — *константы.*

С использованием этих приближений по формуле (4) построена функция, приближающая исходную функцию вне малых окрестностей точек разрывов.

Теорема 3.6. *В условиях теоремы 3.5, если дополнительно* $0 < \beta < \gamma/(\gamma+0.5)$, *то* $0 < p_3 < 1$ *и имеет место оценка*

$$\sup_{s \in W_\delta} \left| x^*(s) - x_\Delta^\delta(s) \right| \leq C_3/B^{p_3}, \quad \textit{где } C_3 \text{— } \textit{константа},$$

$W_\delta = R \setminus (\cup_{k=1}^m (s_k^\delta - B^{p_3-1}, s_k^\delta + B^{p_3-1}))$, $p_3 = \min\{p+0.5-0.5\beta; \gamma(1-\beta) - 0.5\beta; p\beta\}$.

В §2 главы 3 решается уравнение с конечномерной нелинейностью (8) на классах обобщенных функций. Предполагается, что x^* удовлетворяет условию 2. Как и в §1 рассматривается два варианта:

а) положения особенностей известны;

б) положения особенностей неизвестны.

Ядро уравнения $K(t,\sigma)$ удовлетворяет тем же условиям, что и в §1. Для построения регуляризованного решения используется тот же метод регуляризации (9).

В случае, когда положения особенностей известны, алгоритм П1(а)$'$ уточнения параметра σ аналогичен алгоритму П1(а) §1 настоящей главы, только вместо формулы (10) для вычисления σ^{i+1} используется следующая формула

$$\sigma^{i+1} = \sigma^i - \frac{x_\delta^{B_i}[\sigma^i](s_k - 3\pi/(2B_i))/B_i - x_\delta^{B_i^\beta}[\sigma^i](s_k - 3\pi/(2B_i^\beta))/B_i^\beta}{\frac{\partial}{\partial\sigma} x_\delta^{B_i}[\sigma^i](s_k - 3\pi/(2B_i))/B_i}.$$

Теорема 3.8 аналогична теореме 3.2 с заменой условия 1$'$а) на 2а).

Положим $B = B_{i(\delta)}$, $\sigma = \sigma^{i(\delta)}$, где $B_{i(\delta)}$, $\sigma^{i(\delta)}$ определяются алгоритмом П1(а)$'$. Выпишем формулу для определения приближения к величинам скачков

$$\Delta_k^\delta = -3\pi^2 x_\delta^B[\sigma](s_k + 3\pi/(2B))/(2B), \quad k = 1, 2, \ldots, l.$$

Пусть

$$x_\Delta^\delta(s) = x_\delta^{B^\beta}[\sigma](s) - \sum_{k=1}^{l} \Delta_k^\delta \cdot \bar{\Phi}(B^\beta, s - s_k).$$

Введем множество $W_\delta = R \setminus (\cup_{k=1}^m (s_k^\delta - B^{p_3-1}, s_\delta^k + B^{p_3-1}))$, $p_3 = \min\{p + 0.5 - 0.5\beta; \gamma(1-\beta) - 0.5\beta; p\beta\}$.

Теорема 3.9. *В условиях теоремы 3.8 для* $k = 1, 2, ..., l$ *имеем*

$$\left|\Delta_k^\delta - \Delta_k\right| \le C_2/B,$$

где C_2 — *константа. Если дополнительно* $0 < \beta < \gamma/(\gamma + 0.5)$, *то* $0 < p3 < 1$ *и имеет место оценка*

$$\sup_{s \in W_\delta} \left|x^*(s) - x_\Delta^\delta(s)\right| \le C_3/B^{p_3}, \quad C_3\text{—}\textit{константа}.$$

Так же как и в §1 алгоритм П1(б)′ уточнения параметра объединяет в себе процесс П1(а)′ уточнения параметра σ в случае, когда положения особенностей известны, и алгоритм П определения положений особенностей при фиксированном текущем σ^i. При этом для уточнения σ используется параметр регуляризации B, а для определения положения особенности — $B1 = B/\nu$. Возмущенная правая часть уравнения (2) определяется формулой

$$\psi_\delta^{B/\nu}[\sigma](s) = \int_0^s (x_\delta^{2B/\nu}[\sigma](\tau) + x_\delta^{B/\nu}[\sigma](\tau))d\tau.$$

В лемме 3.4 выписано уравнение (2) для определения Δ_k, s_k ($k = 1, 2, ..., l$) и показано, что возмущения $\Delta\psi_k$ ($k = 1, 2, ..., l$) удовлетворяют условию (II).

Алгоритм П1(б)′ аналогичен алгоритму П1(б), только вместо формулы (11) для вычисления σ^{i+1} используется следующее выражение

$$\sigma^{i+1} = \sigma^i - \frac{x_\delta^{B_i}[\sigma^i](s^i - 3\pi/(2B_i))/B_i - x_\delta^{B_i^\beta}[\sigma^i](s^i - 3\pi/(2B_i^\beta))/B_i^\beta}{\frac{\partial}{\partial\sigma} x_\delta^{B_i}[\sigma^i](s^i - 3\pi/(2B_i))/B_i}.$$

Теорема 3.10 аналогична теореме 3.4 с заменой условия 1′б) на 2б). После получения уточненного значения параметра $\sigma^{i(\delta)}$ с помощью алгоритма П2 находим аппроксимации характеристик особенностей. Теорема 3.11 аналогична теореме 3.5 с заменой условия 1′б) на условие 2б); для полученных приближений справедливы оценки

$$\left|s_k - s_k^\delta\right| \le K_1' r/B_{i(\delta)}, \qquad \left|\Delta_k - \Delta_k^\delta\right| \le C_2/B_{i(\delta)}^{p_2}, \quad k = 1, 2, ..., l,$$

где $p_2 = \min\{p\beta; \gamma(1 - \beta); p + 0.5 - 0.5\beta\}$, K_1', C_2 — константы.

С использованием этих приближений по формуле (7) построена функция, аппроксимирующая исходную функцию вне окрестностей точек разрывов. В теореме 3.12 получена оценка

$$\sup_{s \in W_\delta} \left|x^*(s) - x_\Delta^\delta(s)\right| \le C_3/B^{p_3}, \quad C_3\text{— константа},$$

где $p_0 = (1/2)\min\{p+0.5-0.5\beta; (1-\beta)-0.5\beta; p\beta\}$, $p_3 = \min\{\gamma(1-\beta)-0.5\beta; p\beta/2; (p+0.5-0.5\beta)/2\}$.

В главе 4 приведены описания алгоритмов и результаты численных экспериментов для интегральных уравнений 1 рода, возникающих в приложениях. Информация о задачах и ссылки на дополнительную литературу вынесены в приложение А.2.

В §1 главы 4 для уравнения (8) с гауссовым ядром $K(t,\sigma) = \exp(-t^2/\sigma^2)$ на классах функций с особенностями приведены результаты расчетов, демонстрирующие работоспособность алгоритмов главы 3 (для аппроксимации положений особенностей использовался эвристический алгоритм).

В §2 рассматриваются уравнения, возникающие в структурных исследованиях материалов [3].

Метод РССА предназначен для определения функции радиального распределения атомов $g(r)$, описывающей локальную атомную структуру материалов. Основное уравнение в этом методе имеет вид (для однокомпонентного материала)

$$Ag \equiv (4\pi\rho_0/s)f(s)\int_0^\infty e^{-U\cdot 0.273r/s}\sin(2sr+\psi(s))g(r)dr = \chi(s). \quad (12)$$

Здесь $s \in [c,d]$, $f(s)$ (амплитуда) и $\psi(s)$ (фаза) — известные функции; ρ_0 и U — известные константы; $\chi(s)$ — известная функция.

Для определения структуры бинарных сплавов необходимо решать следующую систему интегральных уравнений

$$Ag \equiv \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{I} \\ \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Здесь каждый блок A_{ij} является интегральным оператором. Блоки $A_{21}, A_{22}, A_{23}, A_{33}$ отвечают экспериментам РССА и отличаются от операторов в (12) постоянным множителем, учитывающим концентрацию веществ в образце. Первая строчка матрицы отвечает дифракционному эксперименту, операторы A_{1j} имеют вид, аналогичный (12).

В диссертации построен метод коллокации на основе полиномов Лежандра. Выведены формулы, позволяющие рекуррентно вычислять коэффициенты матрицы, аппроксимирующей оператор задачи. Это позволяет построить экономичные алгоритмы для решения рассматриваемых проблем. Особенно важно использование этих методов для решения задачи исследования структуры бинарных сплавов. Приведена серия модельных расчетов, показывающих эффективность построенных алгоритмов.

В §3 приведены результаты применения метода коррекции параметров [1] для решения уравнений 1 рода с конечномерной нелинейностью. Метод применялся к следующим задачам:

1) "исправление на аппаратную функцию";

2) РССА для однокомпонентных аморфных и кристаллических материалов;

3) совместное использование РССА и дифракции для расшифровки структуры аморфных бинарных сплавов.

На основе результатов расчетов можно сделать вывод, что метод коррекции параметров позволяет существенно улучшить качество получаемого решения для всех рассмотренных примеров.

В §4 рассматривается плоская нелинейная задача гравиметрии с двумя границами раздела при наличии дополнительной информации об искомых границах [2]. Базовое уравнение имеет вид

$$A[z] \equiv \int_{-1}^{1} \left(\rho_1 \ln \frac{(x-y)^2 + H_1^2}{(x-y)^2 + (H_1 - z_1)^2} + \right.$$

$$\left. + \rho_2 \ln \frac{(x-y)^2 + H_2^2}{(x-y)^2 + (H_2 - z_2)^2} \right) dx = f(y), \qquad (14)$$

где $z = (z_1, z_2)^T$, z_1, z_2 — искомые границы раздела, оператор A действует из $L_2[-1,1] \times L_2[-1,1]$ в $L_2[-1,1]$. В качестве дополнительной информации заданы некоторые приближения к решению (пробные функции) $\hat{z} = (\hat{z}_1, \hat{z}_2)^T$. Математическая формулировка поставленной задачи может быть дана в форме задачи минимизации (метод невязки)

$$\min\{\|z - \hat{z}\| : \|A[z] - f\| \leq \delta\}, \qquad (15)$$

где δ — малый параметр, характеризующий погрешность исходных данных и ошибки дискретизации. Алгоритм решения данной задачи состоит из двух этапов. На первом этапе используются монотонные процессы для получения любого решения уравнения (14). Далее, для удовлетворения условий (15) конструируется процесс минимизации $\|z - \hat{z}\|$ с сохранением условия $\|A[z] - f\| < \delta$ на каждом текущем шаге, что обеспечивается выбором шага $h \in Ker\frac{dA}{dz}$. Приведена серия модельных расчетов, показывающих работоспособность предложенного алгоритма.

В §5 рассматривается задача наклонного радиозондирования ионосферы, электронная концентрация которой зависит только от высоты. Для наклонной схемы зондирования опробована специальная схема счета, позволяющая воспользоваться вольтеррово-подобной спецификой проблемы и организовать счет прямой и обратной задач послойно, шаг за шагом. В частности, в обратной задаче в предложенном алгоритме начальное приближение, в отличии от других работ, не используется и плотность концентрации электронов восстанавливается прямо по измеренным данным.

В приложении А.1 приведены утверждения, касающиеся явления Гиббса, в удобном для читателя виде. В приложении А.2 описаны уравнения и системы, возникающие в структурных исследованиях материалов, задачах гравиметрии и ионосферных исследованиях.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации получены следующие основные результаты:
1) для задачи восстановления функции по зашумленным данным, задачи решения линейного уравнение типа свертки и задачи решения уравнения с конечномерной нелинейностью на классах функций с особенностями построены алгоритмы, позволяющие находить устойчивые приближения для характеристик особенностей и аппроксимировать искомые функции вне малой окрестности особенностей в равномерной метрике;
2) для всех построенных приближений получены оценки точности, которые говорят об эффективности предложенных алгоритмов;
3) разработаны эффективные численные процедуры, проведены методические расчеты решения линейных и нелинейных интегральных уравнений (или систем уравнений) 1 рода, возникающих при исследовании структуры материалов, в геофизике и зондировании ионосферы.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Агеев А. Л., Антонова Т. В., Воронина Е.В . Методы уточнения параметров при решении интегральных уравнений 1 рода // Матем. моделирование. 1996. №12. С.110–124.

2. Агеев А.Л., Болотова(Антонова) Т.В., Васин В.В. Решение обратной задачи гравиметрии о границах раздела трех сред// Физика Земли. 1998. №3. С.54-57.

3. Агеев А.Л., Болотова(Антонова) Т.В., Васин В.В., Попова Е.В. Регулярные методы расшифровки структуры бинарных сплавов/ ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 1995. 18с. Деп. в ВИНИТИ 28.02.95, №546-В95.

4. Антонова Т.В. О решении уравнений 1 рода на классах разрывных функций // Проблемы теор. и прикладной математики: Труды 31-й Региональной молодежной конференции. Екатеринбург: УрО РАН, 2000. С. 30-31.

5. Антонова Т.В. О решении нелинейных по параметру уравнений 1 рода на классах обобщенных функций// Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2000. Т.40. №6. С.819-831.

6. Антонова Т.В. Решение нелинейных уравнений 1 рода на классах функций с разрывами / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 2000. 32с. Деп. в ВИНИТИ 17.10.00, №2639-В00.

7. Антонова Т.В. Решение нелинейных уравнений первого рода на классах обобщенных функций // Труды 32-й Региональной молодежной конференции "Проблемы теоретической и прикладной математики", (Екатеринбург, 29 января – 2 февраля 2001г.) Екатеринбург: УрО РАН, 2001. С. 72-76.

8. Антонова Т.В. О решении уравнений 1 рода на классах обобщенных функций // Тезисы докл. Всеросс. научн. конф. "Алгоритмический анализ неустойчивых задач", (Екатеринбург, 26 февраля – 2 марта 2001г.) Екатеринбург: Изд-во УрГУ, 2001. С. 76-77.

9. Антонова Т.В. Восстановление функции с конечным числом разрывов 1 рода по зашумленным данным // Известия вузов. Математика. 2001. №7. С. 65-68.

10. Ageev A.L., Antonova T.V. On solution of nonlinear with resped to parameter equation of the first kind on the class of discontinuous functions // J. Inv. Ill-Posed Problems. 1999. V.7. №1. P.1-16.

Антонова Татьяна Владимировна
ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ
НА КЛАССАХ ФУНКЦИЙ С ОСОБЕННОСТЯМИ

АВТОРЕФЕРАТ

Подписано в печать 22.10.01 Формат 60 ×84/16. Объем 1,4 п.л.
Тираж 100 экз. Заказ № 150
Размножение с готового оригинал-макета в типографии УрО РАН
620219, Екатеринбург. ул. С.Ковалевской,18.